

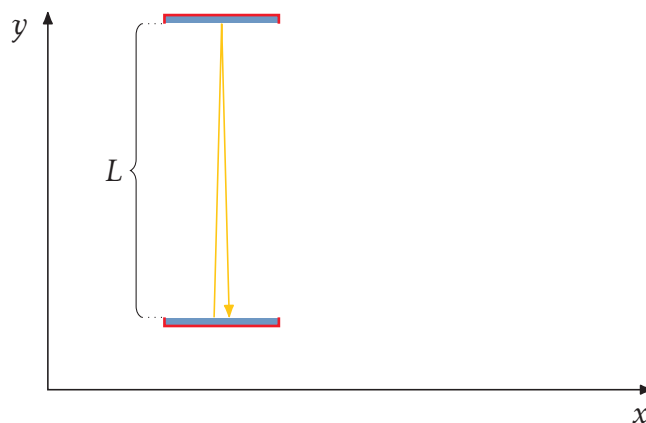
Kapitel 2

Et ur i bevægelse går langsomt

2.1 Tidsforlængelse, lysuret

Et af den specielle relativitetsteoris kardinalpunkter er udsagnet, at “*et ur i bevægelse går langsomt*”, hvilket vi nu skal vise. Beviset er baseret på Relativitetsprincippet, Pythagoras’ sætning (som man kan finde et kort bevis for i [Appendiks A](#)), og det at lysets hastighed c i det tomme rum *altid* er den samme, uanset hvor hurtigt kilden bevæger sig, og uanset hvor hurtigt observatøren bevæger sig.

Vi begynder med at konstruere et såkaldt lysur – vist skematisk i [Figur 2.1](#) – der består af to ideelle spejle, hvorimellem der kan løbe en lyspuls.



Figur 2.1: Et lysur i hvile. For at gøre både ud- og hjemturen synlige, er lysets ruter ikke tegnet sammenfaldende, som de ellers bør være.

I lysuret i hvile, se [Figur 2.1](#), er perioden den tid, det tager lyset at bevæge sig fra det ene spejl, hen til det andet og tilbage igen. Hvis afstanden mellem spejlene er givet som L , får man altså perioden T_0 – svarende til den tidslige afstand fra tik over tak, tilbage til tik på et gammeldags ur – som

$$T_0 = \frac{2L}{c} \quad (2.1)$$

hvor indekset 0 viser – her og i det følgende – at der er tale om et instrument (ur eller målestok f.eks.) i hvile. Denne tilstand af hvile regnes i forhold til observatøren, der benytter inertialsystemet S med koordinaterne (x, y, z) og tiden t til sine

observationer. Er afstanden mellem spejlene f.eks. 15 cm, vil perioden af lysuret være ca. 1 ns, da lysets hastighed er ca. 30 cm/ns.

Egentid

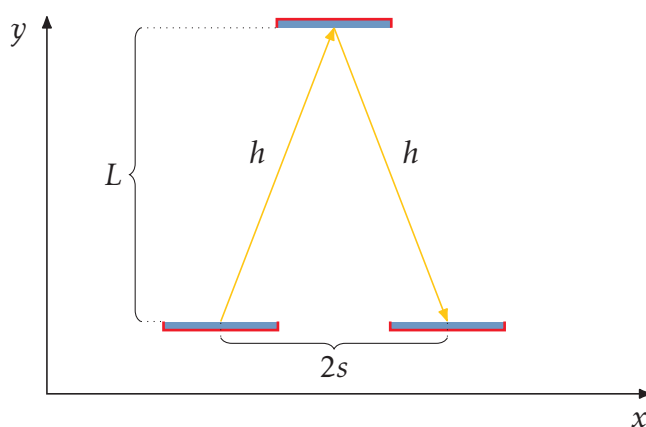
Der gælder helt generelt, at tiden målt på et ur i hvile i forhold til observatøren, altså et ur i det såkaldte hvilesystem, kaldes egentiden. Hvilesystemet er ikke nødvendigvis et system i hvile, men er et inertialsystem hvori det objekt man betragter er i hvile. Dette giver også anledning til begrebet hvilemasse, dvs. massen målt i det system hvori partiklen er i hvile. Vi skal senere se, at hvilemassen ikke er den samme masse som for en partikel i bevægelse.

Egentiden er et mål for hvor lang tid der er gået for observatøren, som er i hvile i forhold til uret, og den afhænger aldrig af bevægelsen i forhold til de øvrige omgivelser af den, der observerer. Hun er jo pr. definition hele tiden i hvile i forhold til dette ur, og hun vil derfor måle T_0 ved de ovenfor nævnte tik-tak-tik. Den tid der går på et *bestemt* ur – f.eks. det ur en rumrejsende har med på en rejse, der således viser hendes egentid – er uafhængig af hvem der aflæser det pågældende ur, og dette ur vil i så fald vise den forløbne egentid for den rumrejsende. Om det går hurtigt eller langsomt i forhold til et *andet* ur, er en anden sag, som vi skal se. Der gælder også, at længder *på tværs* af en evt. bevægelsesretning af uret er uafhængige af systemet hvorfra de observeres, dvs. $L = L_0$, hvor L_0 betegnes “hvilelængden”, en pointe vi vender tilbage til senere. Egentid skrives ofte med det græske ‘tau’, τ , men i dette kapitel benyttes T_0 .

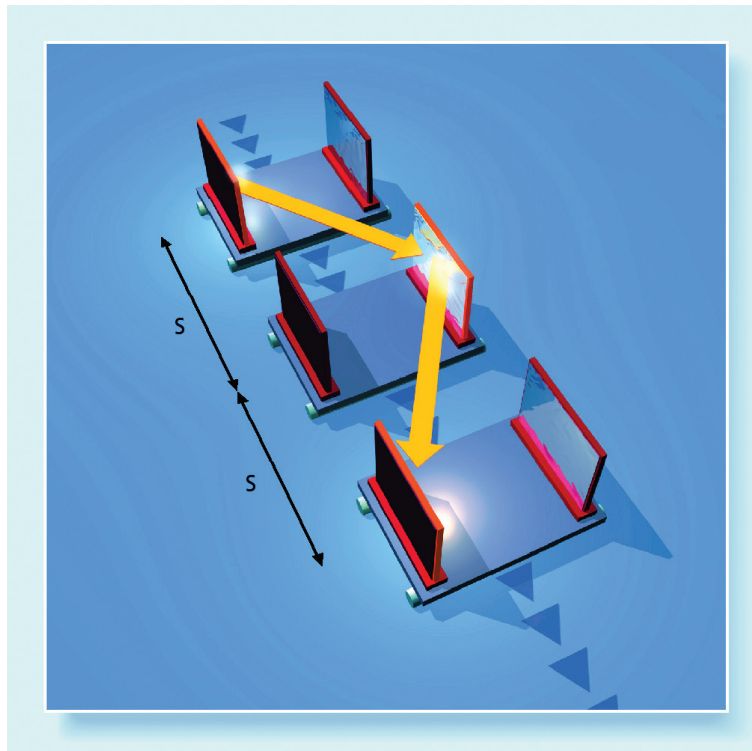
Nu sættes lysuret i bevægelse med hastigheden v langs x -aksen, se [Figur 2.2](#) og den mere levende tegning, [Figur 2.3](#). Afstanden mellem det punkt på x -aksen, hvor lyset udsendes, til det punkt på x -aksen, hvor det når tilbage til spejlet er

$$2s = v \cdot T, \quad (2.2)$$

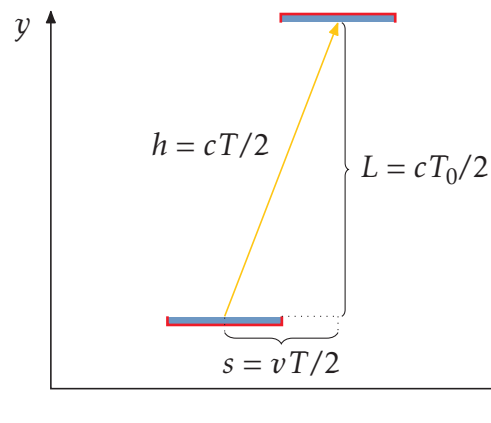
hvor perioden T , som vi her er ude på at bestemme, er perioden, eller antal svingninger, målt med uret i bevægelse. Det er jo periodens afslutning, der definerer, at



Figur 2.2: Lysuret i bevægelse, hvor kun de aktive spejle er vist, men til forskellige tidspunkter, nemlig i det øjeblik de bliver ramt af lyset. Der er kun 2 spejle, et for oven og et for neden. Se også [Figur 2.3](#).



Figur 2.3: Lysuret i bevægelse. Illustration: Troels Marstrand.



Figur 2.4: Lysuret i bevægelse (kun den ene halvdel af de aktive spejle set i Figur 2.2 er vist).

pulsen er nået tilbage. Afstanden tilbagelagt af lyset langs de skrå hypotener, begge kaldet h , er i løbet af samme tidsrum T ,

$$2h = c \cdot T. \quad (2.3)$$

Her er det vigtigt, at lysets hastighed altid er den samme, så c i [ligning \(2.1\)](#) og i [ligning \(2.3\)](#) er den samme. Der vil nu være en retvinklet trekant med kateterne $vT/2$ (fra [ligning \(2.2\)](#)) og $cT_0/2$ (fra [ligning \(2.1\)](#)) og hypotenusen $cT/2$ (fra [ligning \(2.3\)](#)), se [Figur 2.4](#).

Af Pythagoras' sætning $s^2 + L^2 = h^2$ har man således¹

$$\left(\frac{vT}{2}\right)^2 + \left(\frac{cT_0}{2}\right)^2 = \left(\frac{cT}{2}\right)^2, \quad (2.4)$$

hvor kvadraterne kan udføres, og der ganges på begge sider med 4 i alle led,

$$v^2T^2 + c^2T_0^2 = c^2T^2, \quad (2.5)$$

hvorefter vi samler led med hhv. T og T_0 ved at trække v^2T^2 fra på begge sider

$$c^2T_0^2 = c^2T^2 - v^2T^2. \quad (2.6)$$

Nu kan vi dele begge sider med c^2

$$T_0^2 = T^2 - \frac{v^2}{c^2}T^2, \quad (2.7)$$

sætte uden for parentes på højresiden

$$T_0^2 = T^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right), \quad (2.8)$$

dele med udtrykket i parentes på begge sider, og bytte højre- og venstresiden om

$$T^2 = T_0^2 \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (2.9)$$

og til sidst tage den positive kvadratrods på begge sider

$$T = T_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.10)$$

Ligning (2.10) er det ønskede resultat – sammenhængen mellem perioden på et ur i hvile, egentiden T_0 , og et ur i bevægelse T . Perioden på uret i bevægelse T er længere end for uret i hvile T_0 . Hvis perioden er længere, går uret langsommere – den såkaldte tidsforlængelse for et ur i bevægelse.

Hvis v er meget tæt på c bliver v^2/c^2 meget tæt på 1. Trækker man et tal meget tæt på 1 fra 1, får man noget der er tæt på nul. Kvadratroden af et tal der er tæt på nul bliver lidt større, men er dog stadig tæt på nul, og 1 divideret med et tal tæt på nul er meget stort. Perioden af uret i bevægelse er altså meget større end perioden af uret i hvile, eller med andre ord: *“Et ur i bevægelse går langsomt”*. For at tage et specifikt eksempel: Lad $v = 0.8c$ så fås $v^2/c^2 = 0.64$, $1 - v^2/c^2 = 0.36$, $\sqrt{1 - v^2/c^2} = 0.6$ og endelig $1/\sqrt{1 - v^2/c^2} = 5/3$, så et ur med hastigheden 80 % af lysets hastighed går langsomt med en faktor 1.67.

¹ Generelt tages der ikke så mange mellemregninger med som her. Derfor, hvis du føler dig fortrolig med herfra at finde T som funktion af T_0 og v , kan du springe direkte til [ligning \(2.10\)](#).

Hvis derimod $v \ll c$ får man fra [ligning \(2.10\)](#) at $T \simeq T_0$, så medmindre det ene ur bevæger sig med en hastighed sammenlignelig med lysets – eller man kan måle begge ures gang meget præcist – ser man ikke fænomenet. Det er derfor vi ikke ser det i dagligdagen.

Selvom vi har mødt begrebet for lidt siden, skal vi her gentage den vigtige betegnelse: egentid, oversat fra engelsk, “*proper time*”. Egentiden T_0 er den tid, der måles på et ur i hvile i forhold til observatøren, f.eks. på hendes armbånds-ur, eller antallet af hendes hjerteslag, som forhåbentlig er et nogenlunde jævnt gående ur. Da vi nu har set, at “et ur i bevægelse går langsomt” (perioden T af et ur i bevægelse er en faktor $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ større end perioden T_0 af uret i hvile), og et ur trivielt kun kan være i bevægelse i forhold til observatøren, hvis det ikke er i hvile, kan man konkludere at egentidens periode er den kortest mulige, altså at dér går uret hurtigst. I ethvert andet system er intervallet mellem to begivenheder, f.eks. perioden, længere med en faktor større end en. Så objekter i hvile ældes hurtigst, et fænomen vi vender tilbage til i kapitlet om tvillingeparadokset ([Kapitel 20 på side 169](#)).

Sagt på en anden måde kan man sige, at egentiden er den tidslige afstand mellem to begivenheder, der finder sted *samme sted* i forhold til et fast inertialsystem, hvorimod den såkaldte koordinattid er den tidslige afstand mellem to begivenheder, der ikke nødvendigvis finder sted *samme sted*. Dermed er egentidens periode altid mindre end eller lig koordinattidens periode. I det tilfælde hvor lysuret er i bevægelse er der altså ikke tale om en egentid, da uret jo har flyttet sig fra lyspulsens forlod det nederste spejl, til lyspulsens er tilbage ved det nederste spejl. De to begivenheder finder altså ikke sted samme sted. Vi vender tilbage til relationen mellem egentid og koordinattid i [Kapitel 18 på side 153](#).

Begivenhed

Denne diskussion fører naturligt til en definition af ordet “begivenhed” i relativitetsteorien: En begivenhed er en bestemt hændelse på et bestemt sted x, y, z til en bestemt tid, t . Ofte kaldes begivenheder E_1 eller noget lignende (fra engelsk “*event*”), underforstået at man med E_1 mener fire koordinater, de tre rumlige og den tidslige. Man forestiller sig således rummet forsynet med målestokke anbragt i hhv. x, y og z -retningerne, og i hvert krydspunkt et tilsvarende imaginært ur, der på passende vis er synkroniseret med alle de andre ure, og som registrerer tiden for en bestemt hændelse, der foregår i koordinatpunktet x, y, z . Man forestiller sig således ure, der er fast anbragt i hvert eneste krydspunkt. Så en begivenhed er kort sagt x, y, z, t tilhørende en bestemt hændelse. Hvordan synkroniseringen foretages i praksis, vender vi tilbage til i næste kapitel.

Notationer med γ og β

De størrelser, der indgår i [ligning \(2.10\)](#), er så ofte brugt, at de har fået deres egne navne. Således benævnes faktoren, der relaterer T og T_0 , med det græske bogstav

gamma,

$$T = \gamma T_0, \quad (2.11)$$

hvor den såkaldte Lorentz-faktor er givet ved

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.12)$$

Lorentz-faktoren er opkaldt efter den hollandske fysiker Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928), i anerkendelse af, at de såkaldte Lorentz-transformationer først blev udledt af ham (dog baseret på argumenter af *ad hoc* typen, til forskel fra Einsteins basale principper). Ligeledes benytter man notationen, hvor hastigheden i forhold til lyshastigheden er angivet med det græske beta

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad (2.13)$$

hvor – som vi skal se – $|\beta|$ for en massiv partikel aldrig kan blive større end eller lig med 1. I notationen med β ser [ligning \(2.12\)](#) således ud

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (2.14)$$

I eksemplet ovenfor havde vi $\beta = 0.8$ og $\gamma = 5/3$.

I [Appendiks B](#) er gennemgået de såkaldte rækkeudviklinger, som man tit har brug for, enten hvis hastigheden er meget lille sammenlignet med lysets, eller hvis hastigheden er meget tæt på lysets. I disse tilfælde er gode approksimationer til β og γ givet ved

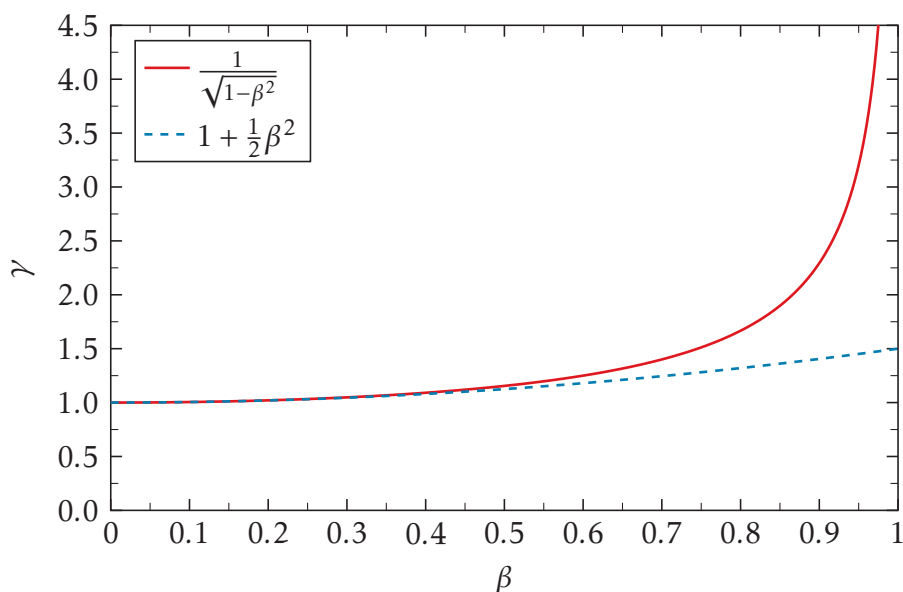
$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \simeq 1 - \frac{1}{2\gamma^2} \quad \text{når } \gamma \gg 1, \beta \simeq 1 \quad (2.15)$$

og

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \simeq 1 + \frac{1}{2}\beta^2 \quad \text{når } \beta \ll 1, \gamma \simeq 1. \quad (2.16)$$

I [Figur 2.5](#) er vist Lorentz-faktoren γ som funktion af den reducerede hastighed β , med det eksakte udtryk, [ligning \(2.14\)](#), og det approksimerede udtryk der kun bør benyttes for lave hastigheder, fra [ligning \(2.16\)](#). [Ligning \(2.14\)](#) har en lodret asymptote ved $\beta = 1$.

Som et alternativ til rækkeudviklingen kan man, når rækkeudviklingen fører til en lineær approksimation, i stedet benytte tangent-ligningen $f_t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. I tilfældet med γ som en funktion af β^2 fra [ligning \(2.16\)](#), dvs. tangenten til $f(x) = 1/\sqrt{1-x} = (1-x)^{-1/2}$, benyttes β^2 istf. x og man finder tangenten med udgangspunkt i $x_0 = 0$, hvorved $\gamma(\beta^2) \simeq -\frac{1}{2}(1-0)^{-3/2}(-\beta^2) + 1 = 1 + \frac{1}{2}\beta^2$, der giver det samme som rækkeudviklingen. Læg mærke til at det approksimerede



Figur 2.5: Lorentz-faktoren γ som funktion af β , i henhold til [ligning \(2.14\)](#) (rød, fuldt optrukket linie), og det approksimerede udtryk i [ligning \(2.16\)](#) (blå, stiplede linie).

udtryk, [ligning \(2.15\)](#), kun er en tangent når γ plottes som funktion af β^2 – approksimationen er således ikke en tangent i [Figur 2.5](#), hvorfor den blå stiplede linie ikke er ret.

Som et eksempel kan vi benytte approksimationen i [ligning \(2.16\)](#) til at finde hvilken hastighed, der svarer til et givet γ , som er meget tæt på 1. I skrivende stund er præcisionen af de bedste atomure man kan fremstille omkring $2 \cdot 10^{-18}$ [13]. Det svarer til, at et sådant ur taber eller vinder ca. 0.9 sekunder i løbet af universets levetid, 13.8 mia. år. I følge [ligning \(2.11\)](#) kan forholdet mellem perioden af et ur i bevægelse T , og perioden af et ur i hvile T_0 , bestemmes ved γ , [ligning \(2.14\)](#). Lad os således sætte $\gamma = 1 + 2 \cdot 10^{-18}$, hvorved dette ur i bevægelse går lige præcis langsomt nok, til at man vil kunne måle det med et tilsvarende ur i hvile. Benytter man nu [ligning \(2.16\)](#), får man $\beta^2/2 \simeq 2 \cdot 10^{-18}$ eller $v \simeq c\sqrt{4 \cdot 10^{-18}} = 2 \cdot 10^{-9}c$ og da $c \simeq 3 \cdot 10^8$ m/s fås $v \simeq 0.6$ m/s, som er 2.2 km/t. I min bog [5] skrev jeg, at man ville have kunnet måle en forskel på Usain Bolts verdensrekordtid på hans eget ur sammenlignet med stadionuret, da han har en topfart på ca. 44 km/t. Men udviklingen af præcise atomure går så stærkt, at det nu i princippet kan måles for langsomt gående mennesker.

Gælder det alle ure?

Nu vil du måske indvende, at vi her kun har vist ovenstående resultater for et ganske bestemt ur, nemlig et lysur. Hvad med dit armbånds-ur eller dine hjerteslag? Jo, vi må være enige om, at to ure, der begge er i hvile skal gå ens, såfremt begge ure fungerer som et ur skal. Dit armbånds-ur går altså på samme måde, som et lysur med en bestemt afstand mellem spejlene. Nu kan vi så sætte dig, dit armbånds-ur og lysuret i jævn bevægelse i forhold til mig. Du vil ikke kunne

detektere nogen forandring i urenes gang, så længe bevægelsen er jævn. Det er en del af relativitetsprincippet, oprindeligt formuleret for mekaniske fænomener af bl.a. Galileo Galilei (1564–1642), at man ikke kan måle, at man er i jævn bevægelse, men kun kan konstatere at man bevæger sig jævnt *relativt* til noget andet, altså ved at ‘kigge udenfor’. Urene vil altså gå synkront. Men, hvis lysuret i bevægelse – set for mig – går langsomt, må dit armbåndsur, der sammen med lysuret også er i bevægelse, ligeledes gå langsomt set for mig, ellers er de ikke længere synkroner. Og hvis de ikke er synkroner, ville du kunne konstatere, at du var i jævn bevægelse, i modstrid med relativitetsprincippet. Dit armbåndsur – og derfor *ethvert* andet ur, argumentet gælder et vilkårligt velfungerende ur – går altså langsomt, set for mig.

Et atom er på en måde et avanceret ur, hvori elektronens kredsen omkring atomkernen fungerer som viseren på et ur – en fast rotationshastighed omkring kernen. Fra kvantefysikken ved vi, at denne planetbane-analogi ikke er helt korrekt, men til dette formål fungerer den fint. Dette eksotiske ur vil ifølge ræsonnementet ovenfor også gå langsomt, hvis det er sat i bevægelse. Elektronen roterer altså langsommere rundt om kernen, målt af den, der ikke bevæger sig med atomet/uret. Da molekylære processers hastighed i bund og grund er bestemt af elektronernes banehastighed, vil de molekylære processer, og dermed de biologiske processer, også gå langsomt. En person i bevægelse ældes altså lidt langsommere end en person i hvile, men da man altid er i hvile i forhold til sig selv, kan man ikke mærke eller måle det uden at sammenligne med andre. Og når man bevæger sig i forhold til andre, kan man vende det om og sige, at de bevæger sig i forhold til en selv, hvorved det er deres aldring, der sløves. Så hvem ældes langsomst? En mere udførlig diskussion af dette mærkelige fænomen findes i kapitlet om [tvillingeparadokset](#), [Kapitel 20](#).

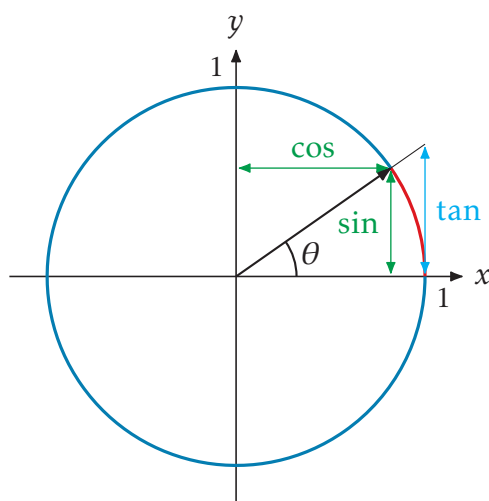
Som vi også skal se senere, bl.a. i [Kapitel 15](#), ændrer tingene sig, hvis man tager tyngdekraftens påvirkning af en i øvrigt fri partikel med i betragtningen. Så er perioden for egentiden ikke længere den kortest mulige, men den længst mulige, således at kastede objekter ældes minimalt.

Kapitel 19

Rumtid og hyperbolske funktioner*

19.1 Trigonometriske funktioner

Vi har allerede ovenfor benyttet hyperbolske funktioner, men har endnu ikke set hvad det er der karakteriserer dem. Det gør vi nu. Dertil er det en god idé først at repetere nogle kendsgerninger om de mest almindelige trigonometriske funktioner, $\sin(\theta)$, $\cos(\theta)$ og $\tan(\theta)$.



Figur 19.1: Trigonometriske funktioner afbildet på enhedscirklen.

Som bekendt afbilder funktionerne $\sin(\theta)$ og $\cos(\theta)$ enhedscirklen – vist med blå i [Figur 19.1](#) – idet

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1. \quad (19.1)$$

På figuren er vinklen θ indtegnet sammen med de tilhørende værdier for $\sin(\theta)$ og $\cos(\theta)$. Man måler ofte størrelsen af vinklen ved længden af det udspændte udsnit på enhedscirklen (i [Figur 19.1](#) tegnet med rødt). Vinklen θ antager så værdier i intervallet fra 0 til 2π (modulo 2π). Enheden kaldes “radian”. Alternativt kan man måle vinklen med en normal vinkelmåler (der tillader en inddeling af cirklen i 360 grader) ifht. x -aksen, eller sætte vinklen lig med 2 gange arealet mellem x -aksen, cirkelbuen og vinkelpilen. Desuden er $\tan(\theta)$ – y -afstanden fra x -aksens $(1, 0)$ til

forlængelsen af vinkelpilen – indtegnet med lys blå – og det ses, at efterhånden som θ går mod $\pi/2$, går $\tan(\theta)$ mod ∞ .

En rotation af koordinatsystemet fremkommer ved at benytte

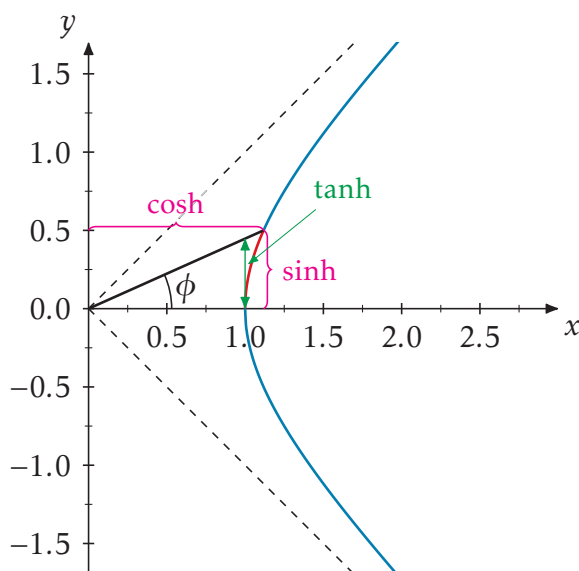
$$x' = x \cos(\theta) + y \sin(\theta) \quad (19.2)$$

$$y' = -x \sin(\theta) + y \cos(\theta) \quad (19.3)$$

og enhedscirkelns ligning

$$r^2 = x^2 + y^2 = 1 \quad (19.4)$$

fastlægger afstanden fra centrum til ethvert punkt på cirkelbuen til at være 1. Notationen her er lidt abstrakt, idet x og y blot er matematiske koordinater. Højresiden af [ligning \(19.4\)](#) skal således være 1m^2 såfremt der i stedet er tale om rumlige afstande for x og y .



Figur 19.2: Hyperbolske funktioner afbildet på en hyperbel.

19.2 Hyperbolske funktioner

På næsten samme måde kan vi nu se på de mest almindelige hyperbolske funktioner, $\sinh(\theta_h)$, $\cosh(\theta_h)$ og $\tanh(\theta_h)$. De hyperbolske funktioner er defineret som

$$\sinh(\theta_h) = \frac{e^{\theta_h} - e^{-\theta_h}}{2} \quad \text{og} \quad \cosh(\theta_h) = \frac{e^{\theta_h} + e^{-\theta_h}}{2}, \quad (19.5)$$

hvorfra man finder $\tanh(\theta_h) \equiv \sinh(\theta_h)/\cosh(\theta_h) = (e^{\theta_h} - e^{-\theta_h})/(e^{\theta_h} + e^{-\theta_h})$. Her afbilder funktionerne $\sinh(\theta_h)$ og $\cosh(\theta_h)$ enhedshyperblen $x^2 - y^2 = 1$ idet

$$\cosh^2(\theta_h) - \sinh^2(\theta_h) = 1, \quad (19.6)$$

hvilket vises vha. [ligning \(19.5\)](#). Argumentet i disse funktioner, den hyperbolske vinkel θ_h – som *ikke* er lig den geometriske vinkel ϕ – antager værdier i intervallet

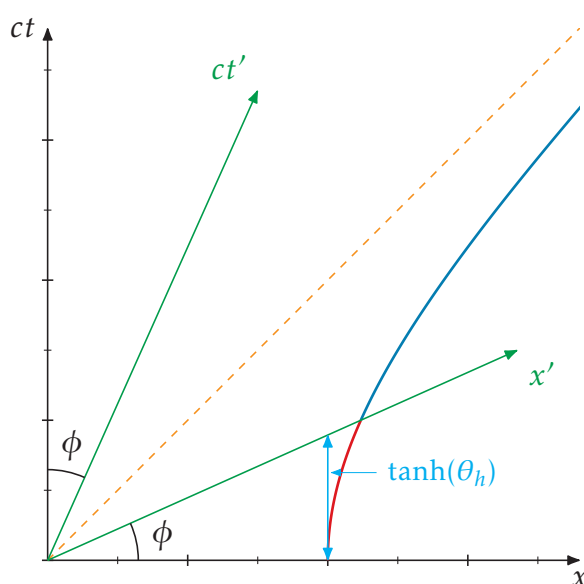
fra 0 til ∞ . Den geometriske vinkel ϕ er indtegnet i **Figur 19.2** sammen med de tilhørende værdier for $\sinh(\theta_h)$ og $\cosh(\theta_h)$. Desuden er $\tanh(\theta_h)$ – y -afstanden fra x -aksens $(1,0)$ til vinkelpilen indtegnet med lys blå – og det ses, at efterhånden som θ_h går mod ∞ , går $\tanh(\theta_h)$ mod 1. Som i cirkel-tilfældet kan man alternativt sætte vinklen lig med 2 gange arealet mellem x -aksen, hyperbelbuen, tegnet med rødt, og vinkelpilen. Men læg mærke til at den hyperbolske vinkel θ_h *ikke* kan måles med en normal vinkelmåler. Derimod, den vinkel man *kan* måle med en vinkelmåler ϕ er givet som $\tan(\phi) = \tanh(\theta_h)$, idet jo netop $\tanh(\theta_h)$ er højden ved $x = 1$, dvs. stigningen.

I den specielle relativitetsteori er der faktisk en vigtig størrelse, der ligner venstresiden i **ligning (19.6)**, nemlig definitionen af rumtids-intervallet (her sat til 1 i lighed med enhedscirklen ovenfor, og hvor enheden af højresiden egentlig er m^2)

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 - c^2 \Delta t^2 = 1, \quad (19.7)$$

der samtidig er invariant, ligesom højresiden i **ligning (19.6)**. Der er ligeledes en størrelse, der går mod 1, når energien går mod uendelig, nemlig $\beta = v/c$ og en besnærende lighed mellem skiftet af fortegn på andet led i *både* **ligning (19.6)** ifht. **ligning (19.1)** og **ligning (19.7)** ifht. **ligning (19.4)**. Det er derfor nærliggende, at relativistiske fænomener kan beskrives med hyperbolske funktioner. I **Kapitel 16** med den konstant accelererende partikel så vi, at et variabel-skift til $\tilde{x} = \alpha x/c^2$ og $\tilde{t} = \alpha t/c$ medfører, at **ligning (16.14)** kan skrives som $(\tilde{x} + 1)^2 - \tilde{t}^2 = 1$, dvs. $\tilde{x} = \sqrt{1 + \tilde{t}^2} - 1$, der kan flyttes hen til at skære x -aksen i $(1, 0)$ med $\tilde{x} = \sqrt{1 + \tilde{t}^2}$. Erstatte man her \tilde{x} med $\cosh(\theta_h)$ og \tilde{t} med $\sinh(\theta_h)$, ses det direkte vha. **ligning (19.6)**, at de hyperbolske funktioner – naturligvis – beskriver enhedshyperblen.

I **Figur 19.3** er vist et rumtidsdiagram, hvor de grønne akser er fra det mærkede system S' og de sorte er fra S . Der er altså tale om et skævvinklet koordinatsystem



Figur 19.3: En Lorentz-transformation til et system S' der bevæger sig med den relative hastighed $\beta = v/c = \tanh(\theta_h) = \tan(\phi)$.

– med rum og tid, og ikke blot rent rumlige koordinater – som i [Figur 10.1](#), og koordinaterne findes på samme måde. Med gult er vist en linie med hældning 1, dvs. $v = c$, hvilket vil sige, at det kunne være lys. Så når det ene system nærmer sig lysets hastighed i forhold til det andet, klapper akserne sammen. Allerede i forbindelse med Galilei-transformationen, [Figur 10.2](#), så vi at t' -aksen skal vinkles i forhold til t -aksen. Vi kunne således her ret let have indset at også x' -aksen skal vinkles i forhold til x -aksen: Akseinddelingerne i rum og tid må være ens for S' hvis de er det i S , og hvis lysets hastighed skal være den samme i begge systemer, må akserne vinkle symmetrisk om lys-linien. Også her ses den store lighed mellem rum og tid i den specielle relativitetsteori.

Nu benytter vi Lorentz-transformationen til at finde ud af, *hvordan* akserne i S' er orienteret ifht. akserne i S , se [Figur 19.3](#)

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(x - \beta ct), \quad (19.8)$$

så vi finder ct' -aksens retning i S ved at sætte $x' = 0$, som jo gælder alle punkter på ct' -aksen. Deraf følger $x = \beta ct$, der er en linie med hældning β i forhold til ct -aksen i et (x, ct) -diagram. Tilsvarende finder vi ved at sætte $ct' = 0$ (alle punkter på x' -aksen) ind i

$$ct' = \frac{ct - \frac{v}{c}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(ct - \beta x) \quad (19.9)$$

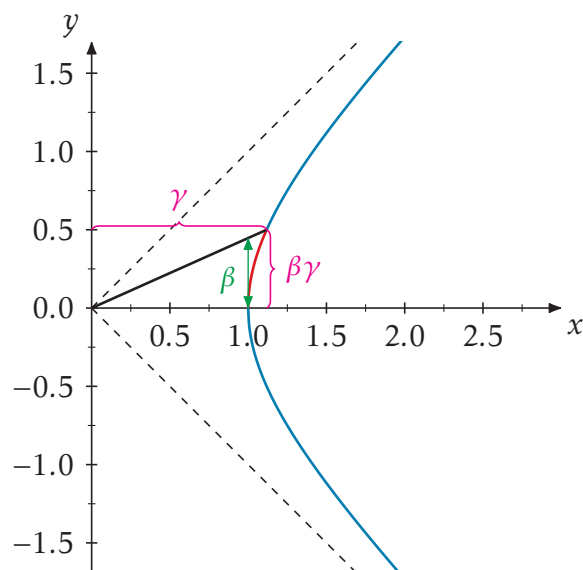
at $\beta x = ct$, dvs. en linie med hældning β i forhold til x -aksen i det samme diagram. Men hældningen er jo tangens til vinklen ϕ fra før. Faktisk kan vi sætte

$$\beta = \frac{v}{c} = \tanh(\theta_h) = \tan(\phi), \quad (19.10)$$

så vi nu kan udtrykke hastigheden ved en hyperbolsk vinkel θ_h . De mærkede akser ligger altså begge med en trigonometrisk vinkel på $\phi = \arctan(\beta)$ ifht. de umærkede akser.

Selvom x' - og t' -akserne afbildes i [Figur 19.3](#) som værende ikke indbyrdes vinkelrette i rummet, er de alligevel indbyrdes vinkelrette i rumtiden (hvilket vi viser i [Kapitel 24](#)). Rumtids-diagrammet kaldes ofte et Minkowski-diagram.

Det er dog ikke hele historien, fordi aksernes inddeling ikke er den samme. Men det er ikke så svært at finde den rette inddeling i S' , idet hyperblen er givet ved [ligning \(19.7\)](#), $\Delta s^2 = \Delta x^2 - c^2 \Delta t^2 = 1$, da den går igennem punktet $(x = 1, ct = 0)$ i S . Det samme er gældende i det mærkede system eftersom venstresiden i [ligning \(19.7\)](#) er en invariant, $\Delta s^2 = \Delta s'^2$. Så det punkt enhedshyperblen skærer x' -aksen i må være 1. Med andre ord siger [ligning \(19.7\)](#) – som i cirkeltilfældet – at 'afstanden' (i dette tilfælde *rumtidsafstanden*) fra centrum til ethvert punkt på hyperblen er 1 – i alle koordinatsystemer. Selvom det ikke ser sådan ud på tegningen, som rent visuelt kun viser den rumlige afstand.



Figur 19.4: De relativistiske størrelser γ , β og $\beta\gamma$ afbildet på en hyperbel. De er henholdsvis proportionale med energien, hastigheden og impulsen.

Og ifølge [ligning \(19.6\)](#) må [ligning \(19.7\)](#) være lig med $\cosh^2(\theta_h) - \sinh^2(\theta_h)$, ganske som i tilfældet med cirklen hvor $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = x^2 + y^2 = 1$. De hyperbolske koordinattransformationer, dvs. Lorentz-transformationerne, bliver derfor

$$ct' = ct \cosh(\theta_h) - x \sinh(\theta_h), \quad (19.11)$$

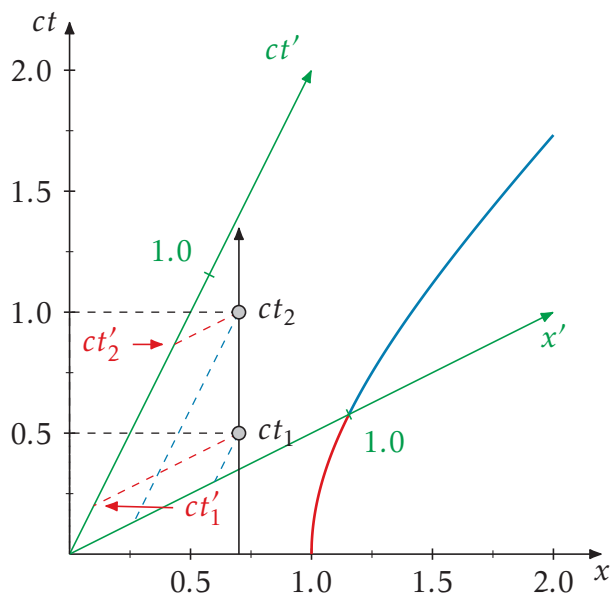
$$x' = -ct \sinh(\theta_h) + x \cosh(\theta_h), \quad (19.12)$$

da $x'^2 - c^2t'^2 = (-ct \sinh(\theta_h) + x \cosh(\theta_h))^2 - (ct \cosh(\theta_h) - x \sinh(\theta_h))^2 = x^2 - c^2t^2$ idet krydsleddene af typen $\cosh(\theta_h) \sinh(\theta_h)$ hæver og $\cosh^2(\theta_h) - \sinh^2(\theta_h) = 1$.

Læg mærke til ligheden af [ligning \(19.11\)](#) og [ligning \(19.12\)](#) med [ligning \(19.2\)](#) og [ligning \(19.3\)](#), der beskriver en trigonometrisk rotation, og specielt at forskellen fra trigonometriske til hyperbolske funktioner er forbundet med forskellen i fortegnet i [ligning \(19.7\)](#) sammenlignet med [ligning \(19.4\)](#). Ifølge [ligning \(19.10\)](#) har vi altså $\beta = v/c = \tanh(\theta_h)$, dvs. den hyperbolske vinkel kan findes ud fra hastigheden i enheder af lysets $\theta_h = \operatorname{arctanh}(\beta)$. Lorentz-faktoren γ kan findes på samme vis, idet $\tanh^2(\theta_h) = 1 - 1/\cosh^2(\theta_h)$ så $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2} = 1/\sqrt{1 - \tanh^2(\theta_h)} = \cosh(\theta_h)$.

Som vist i [Figur 19.4](#), øges $\cosh(\theta_h)$, dvs. γ , efterhånden som θ_h , dvs. β , bliver større – helt som ventet. På tilsvarende vis fås at $\sinh(\theta_h) = \cosh(\theta_h) \tanh(\theta_h) = \beta\gamma$. Relationerne mellem de hyperbolske funktioner og β , γ og $\beta\gamma$ kan også ses ved sammenligning af [ligning \(19.11\)](#) og [ligning \(19.12\)](#) med hhv. [ligning \(19.9\)](#) og [ligning \(19.8\)](#).

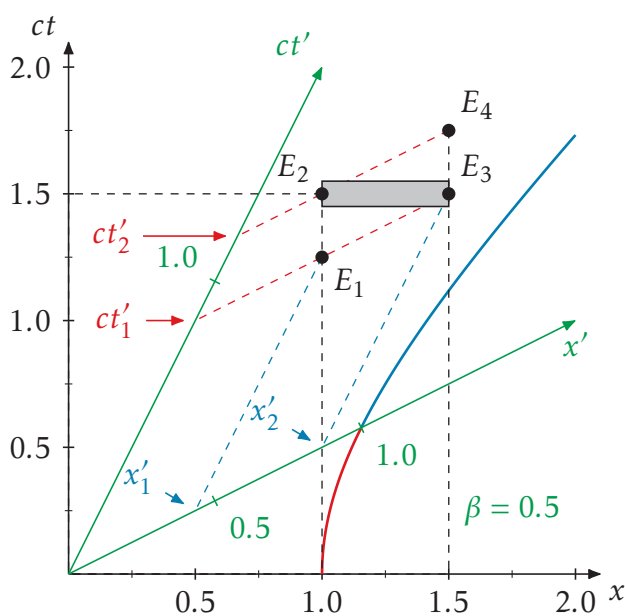
Som et eksempel, vist i [Figur 19.5](#), kan vi se på tidsforlængelse, altså det faktum at et tidsrum ser længere ud fra et system i bevægelse. I figuren er vist to begivenheder, der foregår i samme punkt i systemet S , men til forskellige tider, t_1 og t_2 , der er adskilt af $ct = 0.5$, som indikeret med de vandrette stiplede linier. For at finde det tilsvarende tidsrum i S' kalibreres først x' -aksen ved at afsætte 1 i



Figur 19.5: Tidsforlængelse, set i Minkowski-rummet.

det punkt, hvor hyperblen krydser akserne, og derefter tegnes linier parallelt med x' -aksen hen til ct' -aksen (stiplet, rød). Tidsrummet i S' kan nu ses direkte at være længere end tidsrummet i S ($ct' \approx 0.6$ sammenlignet med $ct = 0.5$ i dette tilfælde, hvor $\beta = 0.5$). Yderligere kan man, ved at trække linier parallelt med ct' -aksen ned til x' -aksen (stiplet, blå) se, at de to begivenheder der foregår samme sted i S , ikke foregår samme sted i S' .

Som diskuteret i forbindelse med [ligning \(16.14\)](#) kan man ved hjælp af et variabelskift måle afstande i enheder af c^2/α og tider i enheder af c/α , så 1 ud ad x -aksen kan f.eks. være knapt et lysår, hvis $\alpha = g$, hvorved 1 ud ad ct -aksen vil være knapt et år.



Figur 19.6: Længdeforkortning, set i Minkowski-rummet.

Længdeforkortning kan vises på tilsvarende vis: En stang er i hvile i systemet S , som vist i [Figur 19.6](#). Stangen i hvile bevæger sig altså ud ad tidsaksen ct , men ikke ud ad rumaksen x , så man skal forestille sig, at dens verdenslinie er mellem de to lodrette stiplede linier. Observatøren i S finder hvilelængden ved *samtidigt* at måle positionerne af hhv. venstre og højre ende af stangen. I det viste tilfælde er svaret forskellen mellem positioner målt ved E_2 og E_3 , der er samtidige: 0.5. Observatøren i systemet S' , hvori stangen er i bevægelse, finder ligeledes længden ved *samtidigt* at måle positionerne af hhv. venstre og højre ende af stangen, men i dette tilfælde (da de ikke kan blive enige om samtidighed) er det begivenhederne E_1 og E_3 (eller E_2 og E_4), der er samtidige iflg. de røde stiplede linier – stangen bevæger sig jo opad mellem de lodrette stiplede linier, efterhånden som tiden går. Så for S' findes længden ved at indtegne linier parallelt med ct' -aksen ned til x' -aksen fra E_1 og E_3 , der er *samtidige* i dette system. I det mærkede system, hvori stangen er i bevægelse, findes længden derfor til at være $x'_2 - x'_1$, der er mindre end 0.5 – længdeforkortning. Det ses altså næsten direkte, at længdeforkortning skyldes mangel på en universel samtidighed.

19.3 Rapiditet

Den hyperbolske vinkel – som altså er et udtryk for hastigheden – er nyttig, idet den er additiv, og i den forbindelse kaldes vinklen for *rapiditet*. Betragt Lorentz-transformationerne som angivet i [ligning \(19.11\)](#) og [ligning \(19.12\)](#) og omskriv dem til matrix-form

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\theta_h) & -\sinh(\theta_h) \\ -\sinh(\theta_h) & \cosh(\theta_h) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = L(\theta_h) \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}.$$

To på hinanden følgende Lorentz-transformationer med hastighederne v_1 og v_2 må altså (idet $\beta_i = \frac{v_i}{c} = \tanh(\theta_{hi})$) være givet fra $L(\theta_{h12}) = L(\theta_{h1}) \cdot L(\theta_{h2})$. Udfører man matrix-multiplikationen får man at

$$L(\theta_{h1}) \cdot L(\theta_{h2}) = L(\theta_{h1} + \theta_{h2}), \quad (19.13)$$

idet additionsformlerne for de hyperbolske funktioner er

$$\cosh(\theta_{h1} + \theta_{h2}) = \cosh(\theta_{h1}) \cosh(\theta_{h2}) + \sinh(\theta_{h1}) \sinh(\theta_{h2}), \quad (19.14)$$

$$\sinh(\theta_{h1} + \theta_{h2}) = \cosh(\theta_{h1}) \sinh(\theta_{h2}) + \sinh(\theta_{h1}) \cosh(\theta_{h2}). \quad (19.15)$$

Så man kan altså udføre en Lorentz-transformation til et system med v_1 fulgt af en Lorentz-transformation til et system med v_2 ved at udføre Lorentz-transformationen bestemt ved *summen* af rapiditeterne.

Endelig kan man vise, at systemet er konsistent ved at benytte den matematiske identitet for addition med hyperbolsk tangens med de hyperbolske vinkler $\theta_h = \theta_{h1} + \theta_{h2}$

$$\tanh(\theta_h) = \tanh(\theta_{h1} + \theta_{h2}) = \frac{\tanh(\theta_{h1}) + \tanh(\theta_{h2})}{1 + \tanh(\theta_{h1}) \tanh(\theta_{h2})} \quad (19.16)$$

som med $\beta_i = v_i/c = \tanh(\theta_{hi})$ umiddelbart giver

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}, \quad (19.17)$$

i tråd med [ligning \(10.8\)](#).

Rapiditet er et vigtigt begreb i (partikel-)fysikken, hvor man normalt benytter symbolet φ i stedet for θ_h . En af de vigtige pointer er, at en rapiditets-forskel $\Delta\varphi$ er en Lorentz invariant, altså uafhængig af referencesystemet. Det skyldes at rapiditeten er additiv, svarende til at under operationen addition er afstanden fra 4 til 5 den samme som fra 8 til 9. Dette gælder også i det tilfælde, hvor der er tale om en differentiell forskel, $d\varphi$.

Som skrevet i forbindelse med [Figur 19.4](#), er koordinaterne proportionale med henholdsvis $E = \gamma mc^2$ og $p = \beta \gamma mc$, så vi har altså relationerne

$$\cosh(\varphi) = \gamma = \frac{E}{mc^2}, \quad \sinh(\varphi) = \beta\gamma = \frac{p}{mc}, \quad \tanh(\varphi) = \frac{\sinh(\varphi)}{\cosh(\varphi)} = \frac{pc}{E}. \quad (19.18)$$

Vi benytter igen standard integralet

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right), \quad (18.3)$$

som kan kombineres med [ligning \(19.18\)](#) til

$$\int d\varphi = \varphi = \sinh^{-1}\left(\frac{p}{mc}\right) = \int \frac{dpc}{\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}} = \int \frac{dpc}{E}, \quad (19.19)$$

hvorfra man direkte kan sammenligne integranderne

$$\boxed{d\varphi = \frac{dpc}{E}}, \quad (19.20)$$

som er et vigtigt resultat: Da venstresiden er Lorentz-invariant, må højresiden, dpc/E , også være det. Læg mærke til at den differentielle rapiditet næsten er lig med den reducerede hastighed $\beta = pc/E$, men ikke helt da det er differentielle størrelser, og p indgår 'skjult' i nævneren gennem Pythagoras-relationen.

Den inverse hyperbolske sinus fra [ligning \(18.3\)](#) kan også udtrykkes som

$$\sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a}\right) \quad (19.21)$$

så

$$\begin{aligned} \varphi &= \sinh^{-1}\left(\frac{p}{mc}\right) = \ln\left(\frac{p + \sqrt{p^2 + m^2 c^2}}{mc}\right) = \ln\left(\frac{p + E/c}{mc}\right) \\ &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{(p + E/c)^2}{m^2 c^2}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{(p + E/c)^2}{E^2/c^2 - p^2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{(E/c + p)^2}{(E/c - p)(E/c + p)}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{E/c + p}{E/c - p}\right) \end{aligned} \quad (19.22)$$

altså kan rapiditeten skrives som (med [ligning \(19.18\)](#))

$$\varphi = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{(E/c + p)}{(E/c - p)}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{pc}{E}\right). \quad (19.23)$$

Pseudo-rapiditet

Indtil videre har diskussionen af rapiditet været ret generel. Nu betragter vi i stedet en partikel med en impuls \vec{p}_0 , der består af en longitudinal komponent p_L og en transversal komponent p_T . Typisk vælges den longitudinale retning som symmetriaksen i en kollisions-maskines detektor. Vi indfører nu en rent geometrisk størrelse, den såkaldte pseudo-rapiditet η , udfra ligningen

$$\eta = -\ln(\tan(\theta/2)), \quad (19.24)$$

hvor vinklen θ mellem \vec{p}_0 og \vec{p}_L er den vinkel, som partiklen bevæger sig med i forhold til den valgte longitudinale akse, dvs. $\tan(\theta) = p_T/p_L$. Som et par eksempler: $\eta(\theta = 90^\circ) = 0$, $\eta(\theta = 45^\circ) = 0.88$, $\eta(\theta = 10^\circ) = 2.44$ og $\eta(\theta \rightarrow 0^\circ) \rightarrow \infty$.

Vi bruger nu halvvinkel-formlen $\tan(\theta/2) = (1 - \cos(\theta))/\sin(\theta)$ samt $p_T^2 = p_0^2 - p_L^2 = (p_0 + p_L)(p_0 - p_L)$ og kigger på

$$\begin{aligned} \exp(\eta) &= \frac{1}{\tan(\theta/2)} = \frac{\sin(\theta)}{1 - \cos(\theta)} \\ &= \frac{p_0 \sin(\theta)}{p_0 - p_0 \cos(\theta)} = \frac{p_T}{p_0 - p_L} = \frac{\sqrt{(p_0 + p_L)(p_0 - p_L)}}{p_0 - p_L} \\ &= \sqrt{\frac{p_0 + p_L}{p_0 - p_L}}, \end{aligned} \quad (19.25)$$

som fører til at pseudo-rapiditeten også er givet ved

$$\eta = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{p_0 + p_L}{p_0 - p_L}\right). \quad (19.26)$$

Sammenligner man denne ligning med [ligning \(19.23\)](#), hvor man vælger rapiditeten – i dette tilfælde traditionelt kaldet y – som $p = p_L$

$$y = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{(E/c + p_L)}{(E/c - p_L)}\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{p_L c}{E}\right), \quad (19.27)$$

kan man se, at i grænsen $E \gg mc^2$, hvor $E \simeq p_0 c$ får man

$$\eta \simeq y, \quad (19.28)$$

altså at rapiditeten y (der kan tolkes som en Lorentz-transformation fra laboratoriesystemet til det system, hvori partiklen udelukkende bevæger sig transversalt) er cirka lig med den geometriske størrelse, pseudo-rapiditeten. Man kan altså i denne grænse finde partiklens rapiditet ved blot at måle den vinkel, den rammer detektoren med.

Da der også gælder

$$dy = \frac{dp_L c}{E} \quad (19.29)$$

med energien $E^2 = p_L^2 c^2 + p_T^2 c^2 + m^2 c^4$ og definitionen af den “transversale masse” $m_T^2 c^4 = p_T^2 c^2 + m^2 c^4$ finder man rapiditeten ved brug af samme metode som i ligning (19.19)

$$y = \int dy = \int \frac{dp_L}{\sqrt{p_L^2 c^2 + p_T^2 c^2 + m^2 c^4}} = \sinh^{-1}\left(\frac{p_L}{m_T c}\right), \quad (19.30)$$

hvorfra man opnår med $p_L c = E \tanh(y)$ at

$$p_L c = m_T \sinh(y), \quad (19.31)$$

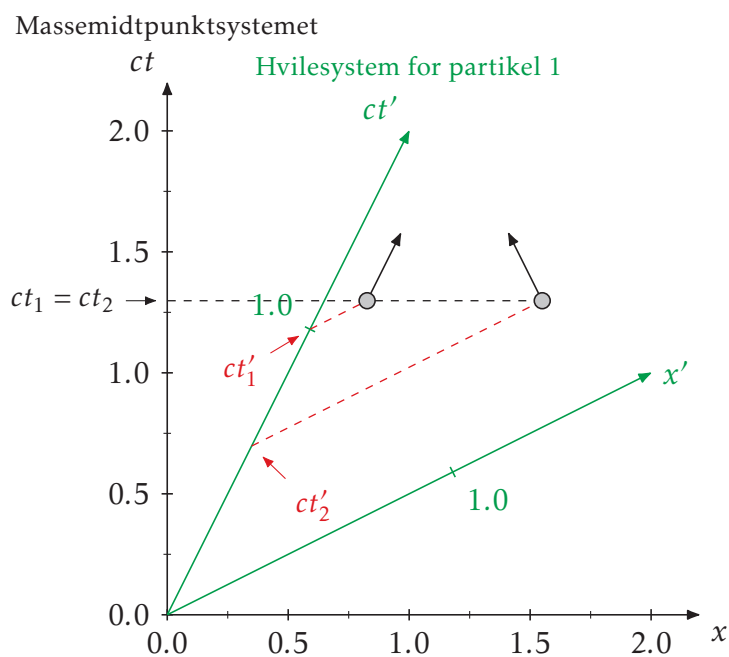
$$E = m_T \cosh(y). \quad (19.32)$$

Så hvis man kan måle den transversale impuls og dermed dens “transversale masse” m_T (givet at partiklen er identificeret, i.e. at dens hvilemasse er kendt), samt partklens vinkel i forhold til den longitudinale akse, kan man finde dens energi. Eller omvendt: Man kan måle dens transversale impuls, vinkel og energi, og derfra bestemme dens hvilemasse.

19.4 To radioaktive partikler

Som et af de sidste eksempler på tidsforlængelse og samtidighed, betragter vi her to ens radioaktive partikler, der i systemet S sendes afsted samtidigt, mod hinanden og med samme fart, hvor de begge tilfældigvis henfalder præcist, da de møder hinanden. Da mødestedet er ét punkt, må det nødvendigvis være ét sted i alle systemer, og henfaldstidspunktet må være det samme for begge partikler – enhver observatør vil kunne registrere to partiklers samtidige henfald fra ét sted. Men hvad nu hvis vi bestemmer os for at se det fra et andet system S' , der følger med den ene partikel? Så bevæger den anden sig, og dermed går dens ur langsommere, så den henfalder senere. Ja, det er korrekt, men den udsendes også tidligere, da den samtidige afsendelse i S ikke er samtidig i S' og “er man bagud, er man foran” netop siger, at den første partikel (der er bagud i forhold til den anden idet S' bevæger sig hen mod den anden), må være foran tidsmæssigt.

Situationen er illustreret i [Figur 19.7](#), hvor det sorte koordinatsystem er massemidtpunktsystemet S og det grønne er roteret, så den tidslige akse er parallel med partikel 1's bevægelse, således at partikel 1 er i hvile i S' . Trækker man linier fra afsendelsernes rumtidskoordinater, parallelle med den rumlige akse i S' , for at finde tiderne hvor partiklerne bliver afsendt, ser man direkte, at partikel 2 afsendes før partikel 1 i S' . Der er altså ikke noget paradoks i, at de mødes og tilfældigvis henfalder til samme tid og samme sted – det sker i alle systemer.



Figur 19.7: To partikler bevæger sig som indikeret med de sorte pile, møder hinanden i hhv. S og S' og henfalder præcist da de mødes, dvs. i én begivenhed. Denne begivenhed må da observeres i alle inertialsystemer, og forklares ved at afsendelsestidspunkterne for de to partikler ikke er ens i alle systemer.